

ISSN: 0391-805X

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

ATTI DEI CONVEGNI LINCEI

137

CONFERENZA ANNUALE DELLA RICERCA

(Roma, 21-25 ottobre 1996)



R O M A

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1998

ALBERTO QUADRIO CURZIO <sup>(a)</sup>, PIER CARLO NICOLA <sup>(b)</sup>

## MODELLI MATEMATICI PER LA CRESCITA ECONOMICA <sup>(c)</sup>, <sup>(d)</sup>

### 1. PREMESSA

La crescita economica riguarda, in estrema sintesi, l'espansione del reddito di un paese e i fattori che ne stanno alla base, tra i quali la disponibilità e la dinamica di lavoro, capitale e risorse naturali, le scelte degli operatori (imprese e famiglie) tra consumi, risparmi e investimenti, il progresso tecnico e tecnologico, nonché una amplissima altra serie di elementi che vanno dal funzionamento dei mercati al contesto istituzionale. È corretto affermare che tali problemi sono stati posti ed analizzati per la prima volta in modo ampio dagli economisti Classici ed in particolare da Adam Smith (1776) e da David Ricardo (1817-1823).

A questi autori sono seguiti numerosi altri economisti interessati al fenomeno della crescita, che è stato certo centrale fino al 1870. Tuttavia nessuno di questi economisti ha utilizzato metodi matematici di analisi, anche se in periodi a noi contemporanei sono state proposte formulazioni matematiche delle loro teorie.

L'utilizzo dei metodi matematici nell'analisi della crescita economica ha luogo con gli anni Trenta di questo secolo, ad opera di Von Neumann (1937) e Harrod (1939) i cui contributi stanno, rispettivamente, alla base dei modelli multisettoriali e dei modelli macroeconomici di crescita. Ai contributi iniziali sono seguiti modelli via via più articolati e complessi, dove il metodo matematico ha assunto un notevole ruolo.

<sup>(a)</sup> Professore Ordinario di Economia Politica - Università Cattolica del Sacro Cuore - Largo A. Gemelli, 1 - 20123 Milano (Italia).

<sup>(b)</sup> Professore Ordinario di Economia Matematica - Università degli Studi di Milano - Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano (Italia).

<sup>(c)</sup> Gli autori ringraziano vivamente il Dr. G. Marseguerra per la collaborazione.

<sup>(d)</sup> Questo saggio rientra in una più ampia iniziativa sul tema «*The New Co-ordinates of Science: Mathematical Modelling and Applications to Social Sciences*», svolta presso il Centro di Ricerche in Analisi Economica della Facoltà di Scienze Politiche della Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano con il contributo della Fondazione Cariplo per la ricerca scientifica.

Il nostro contributo dà una sintesi relativamente semplice, essendo suo scopo presentare tali teorie anche a non economisti. È bene subito anche ricordare che in economia vi sono molti filoni d'analisi dei fenomeni della crescita che non usano metodi matematici (si pensi per esempio alla linea Kutnetz-Abramovitz o alla linea Schumpeter-Kalecki) ma che hanno dato un contributo di grande rilevanza alla analisi della crescita e della dinamica. Molti sono anche gli economisti italiani che hanno analizzato i problemi della crescita. In particolare, Fuà ci ricorda (1993) che limitarsi a considerare il reddito procapite, il suo tasso di crescita e le quantità per valutare se un paese si sta «sviluppando» è fortemente limitante, perchè gli aspetti di qualità sono non meno importanti. Sylos Labini (1992) ci ricorda che un problema centrale dell'economista è quello di essere rigoroso (ed a ciò la matematica può molto servire) ma anche rilevante nel rappresentare la realtà. Pasinetti (1981) combina con originalità le teorie macroeconomiche della crescita e della distribuzione con quelle settoriali della produzione, dei prezzi e del progresso tecnico. Lombardini (1996) estende la visione schumpeteriana dello sviluppo economico per mezzo della teoria dell'evoluzione naturale e della selezione.

La teoria economica si basa su tre componenti: quella analitico-formale, che fa largo uso dei metodi matematici, quella storico-quantitativa, che utilizza elementi istituzionali e storici, quella economico-quantitativa, che utilizza i dati statistici per mezzo dei metodi econometrici. Tutte hanno un loro ruolo, come osserva Quadrio Curzio (1993).

## 2. MODELLI DINAMICI MULTISETTORIALI

Il primo Autore ad occuparsi di un modello multisetoriale dinamico fu il matematico John von Neumann che, nel 1937, pubblicò in Tedesco il suo famoso lavoro sulla crescita economica regolare. Nessun economista all'epoca notò il lavoro, tradotto in Inglese da G. Morton nel 1945-46 e pubblicato sulla *Review of Economic Studies*. Per raggiungere la ribalta dell'attenzione internazionale dovettero passare ancora dieci anni, quando Kemeny, Morgenstern e Thompson, nel 1956, presentarono, rivestendolo di un più accettabile apparato economico, il modello di von Neumann. Nello stesso anno 1956 apparve anche una generalizzazione del modello, ad opera di Gale.

Ma certamente ai tre predetti studiosi va il merito di avere sottolineato l'enorme importanza del contributo di von Neumann e di avere modificato (nella direzione di una maggiore plausibilità economica) le ipotesi di von Neumann. Conviene comunque iniziare con la presentazione del modello generale secondo le linee dettate dal loro Autore, ma impiegando notazioni oggi più usuali.

Si considera un'economia nella quale vengono prodotti  $n$  beni diversi per mezzo di  $m$  processi produttivi lineari e additivi, che impiegano come fattori di produzione gli stessi beni prodotti (cosiddetta produzione circolare). Data la linearità dei processi produttivi i rendimenti di scala sono ovunque costanti, ma a parte questo la rappresentazione data da von Neumann è affatto generale, in quanto vi possono essere processi produttivi a produzioni multiple e capitali sia fissi che circolanti. Indichiamo con  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) la quantità (non negativa) di bene  $i$ -mo impiegata dalla tecnologia  $j$ -ma attivata a scala unitaria, e con  $b_{ij}$  il simbolo riguardante la corrispondente quantità prodotta (pure non negativa). Le predette quantità sono considerate stazionarie ed assegnate esogenamente, ossia costituiscono i dati del modello. Sinteticamente, questi dati tecnologici possono essere rappresentati per mezzo di una coppia di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix};$$

Suddiviso il tempo in periodi di uguale durata, e indicato con  $t$  il generico periodo temporale, sia  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$  il vettore, non negativo, la cui componente  $x_j(t)$  indica la scala di attivazione del processo produttivo  $j$ -mo nel corso del periodo  $t$ -mo. La produzione dei beni richiede trascorra un certo tempo fra l'impiego dei fattori produttivi e l'ottenimento dei prodotti, e precisamente deve passare un intero periodo perchè dai fattori si ottengano i prodotti. In assenza di una domanda finale, i beni prodotti alla fine del generico periodo  $t$  diventano i fattori produttivi disponibili per iniziare un nuovo ciclo produttivo nel periodo  $t + 1$ . Perciò le quantità di beni devono soddisfare le disequazioni

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(t+1) \leq \sum_{j=1}^m b_{ij} x_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ossia

$$(2.1) \quad Ax(t+1) \leq Bx(t) \quad (t = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Introdotti i prezzi (non negativi) dei beni nel periodo  $t$ , rappresentati dal vettore  $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ , von Neumann, seguendo in questo i teorici dell'equilibrio generale, scrive che se nel periodo  $t$  il bene  $i$ -mo risulta impiegato in quantità minore di quella disponibile allora deve avere in equilibrio prez-

zo zero, ossia  $p_i(t) = 0$ . Perciò sinteticamente possiamo scrivere

$$(2.2) \quad p(t+1)Ax(t+1) = p(t+1)Bx(t).$$

Considerando ora i processi produttivi, questi non devono consentire extra-profitti, ossia in ogni processo produttivo il costo unitario non può essere minore del ricavo unitario; devono quindi valere le disequazioni:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) a_{ij} \geq \sum_{i=1}^n p_i(t+1) b_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

ossia

$$(2.3) \quad p(t)A \geq p(t+1)B.$$

Se tuttavia per il processo produttivo  $j$ -mo il costo unitario eccede il ricavo unitario allora quel processo non deve essere attivato, ossia deve porsi  $x_j(t)=0$ . Perciò abbiamo

$$(2.4) \quad p(t)Ax(t) = p(t+1)Bx(t).$$

Le relazioni (2.1)-(2.4) rappresentano il modello di von Neumann della crescita multisettoriale. Invece di considerare soluzioni generali del modello, l'Autore con felice intuizione limitò la sua analisi alla considerazione di soluzioni particolari del tipo seguente:

$$(2.5) \quad x(t+1) = \alpha x(t); \quad p(t+1) = (1/\beta) p(t),$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due numeri positivi, il primo rappresentante il fattore di crescita (comune a tutti i beni) delle quantità di beni, mentre il secondo si può interpretare come un fattore di interesse. Posto  $x$  il vettore delle scale di attivazione nel primo periodo, e  $p$  il vettore dei prezzi nel primo periodo, sostituendo le (2.5) nel sistema (2.1)-(2.4) si ottiene sinteticamente il modello scritto come segue:

$$\begin{aligned} \alpha Ax &\leq Bx, \\ \alpha pAx &= pBx, \\ \beta pA &\geq pB, \\ \beta pAx &= pBx. \end{aligned}$$

La prima relazione stabilisce che se un bene non viene del tutto impiegato, ne segue, nella seconda relazione, un prezzo di equilibrio pari a zero. La terza relazione stabilisce che il fattore di profitto massimo è  $\beta$  per cui, dalla quarta relazione, se un processo consegue un fattore di profitto minore di  $\beta$ , allora quel processo (i cui costi, moltiplicati per  $\beta$ , eccedono i ricavi) non viene attivato. I dati del modello, come si è detto, sono le matrici tecnologiche  $A$  e  $B$ , mentre le incognite sono  $x, p, \alpha, \beta$ . L'esistenza di soluzioni non negative ovviamente dipende dalle ipotesi su  $A$  e  $B$ . Mentre von Neumann ipotizza essere  $a_{ij} + b_{ij} > 0$  per ogni coppia di indici  $i, j$  (ipotesi economicamente opaca), Kemeny, Morgenstern e Thompson hanno introdotto l'ipotesi tuttora universalmente usata, in quanto economicamente di ovvia significatività, e cioè: in ogni processo produttivo si richiede l'impiego almeno di un fattore; ogni bene è prodotto da almeno una tecnologia ossia, matematicamente:

$$sA > 0; \quad Bs > 0,$$

dove  $s$  rappresenta il vettore somma, ossia il vettore  $s = (1, 1, \dots, 1)$ .

Per mezzo della sua ipotesi, von Neumann dimostra l'esistenza di una soluzione impiegando una propria generalizzazione del teorema del punto fisso di Brouwer. Ma oggi si sa, partendo dall'ipotesi di Kemeny, Morgenstern e Thompson, che molto più semplicemente si dimostra in modo elementare che esiste un numero positivo,  $\hat{\alpha}$ , cui è associato (almeno) un  $\hat{x} > 0$ , soluzioni del problema

$$(2.6) \quad \hat{\alpha} = \sup \{ \alpha \mid \alpha Ax \leq Bx, x \in \mathfrak{R}_+^m \}.$$

Basta poi applicare un teorema di separazione fra insiemi convessi per ottenere l'esistenza anche di un vettore di prezzi,  $\hat{p}$ , e di uno scalare  $\hat{\beta}$ , soddisfacenti le relazioni del modello di crescita regolare. Si dimostra inoltre che in equilibrio si ottiene  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ , ossia fattore di crescita e fattore di interesse sono fra loro uguali (in quanto l'intero prodotto netto viene destinato alla crescita dell'economia, mentre i profitti sono interamente risparmiati e investiti).

Le traiettorie individuate da von Neumann, ossia quelle definite dalle relazioni (2.5), sono soltanto uno fra i tipi possibili di traiettorie, ma hanno un particolare significato economico in quanto, dalla loro caratterizzazione contenuta nella (2.6), sono il sentiero lungo il quale l'economia considerata cresce il più rapidamente possibile. In un famoso libro del 1958 Dorfman, Samuelson e Solow hanno cercato di dimostrare che se si considerano altri tipi di traiettorie, con l'obiettivo di rendere massime le quantità di beni prodotti alla conclusione di un orizzonte temporale sufficientemente esteso, allora le traiettorie di von

Neumann della crescita regolare “attraggono” tali altre traiettorie, nel senso che queste ultime, almeno nei periodi intermedi fra l’inizio e la fine dell’orizzonte temporale prefissato, appartengono ad un intorno (in un opportuno senso topologico) del cono delle traiettorie di von Neumann. Per questo le traiettorie di von Neumann vennero dette *autostrada* da Dorfman, Samuelson e Solow. La dimostrazione corretta e generale del cosiddetto *teorema dell’autostrada* fu data poco dopo da Radner (1961). Con il predetto teorema si è dunque resa giustizia all’intuizione di von Neumann: le traiettorie della crescita regolare sono termine di confronto per qualsiasi altro tipo di traiettoria che abbia come obiettivo l’efficienza intertemporale. Ulteriori sviluppi del teorema dell’autostrada sono dovuti a Nikaido (1964).

Un’ulteriore importante approfondimento del modello di von Neumann è stato l’inclusione delle decisioni di consumo (e di investimento). Il pioniere di queste ricerche è il giapponese Morishima, particolarmente con il saggio del 1960 e la monografia del 1964. Nel saggio del 1960 Morishima suddivide i consumatori in due classi: lavoratori e capitalisti. Egli suppone che i lavoratori posseggano solo redditi da lavoro, interamente spesi per acquistare beni di consumo, e che i capitalisti siano remunerati coi profitti, parte dei quali sono spesi in consumo, mentre una parte sono destinati agli investimenti. Morishima dimostra come sia ancora possibile ottenere soluzioni di crescita regolare, ma naturalmente ad un tasso di crescita minore, *ceteris paribus*, di quello ottenibile in assenza di domanda finale.

Un altro modello di von Neumann con domande finali endogene è stato proposto da Nicola (1978), che tratta la domanda di beni nel modo generale proprio della teoria dell’equilibrio generale, ossia senza dover suddividere i consumatori in due classi distinte. Nel modello proposto la dimostrazione di esistenza di soluzioni si avvale del teorema del punto fisso di Kakutani, applicato ad una coppia duale di problemi di programmazione lineare parametrica.

Per molti versi strettamente parente del modello di von Neumann è il lavoro di Samuelson e Solow del 1953; in esso gli Autori trattano l’esistenza e la stabilità relativa delle soluzioni in un modello di produzione con funzioni di produzione positivamente omogenee di primo grado, invece che rappresentare i processi produttivi con matrici. Ma sotto altri aspetti questo modello è meno generale di quello di von Neumann, in quanto non include la possibilità di produzioni congiunte.

Un altro filone multisetoriale dinamico, che ha affinità con quello di von Neumann ma un contenuto empirico assai più marcato, è quello di Leontief (1941,1951,1953) che ha elaborato le tavole delle interdipendenze industriali le quali stanno anche alla base di numerose rilevazioni statistiche. Tra i modelli multisetoriali recenti che usano metodi matematici, due a nostro avviso ap-

paiono innovativi sotto il profilo economico: quello di Pasinetti (1981-1993) e quello di Quadrio Curzio (1975, 1986, 1996, quest'ultimo con F. Pellizzari).

Con una certa approssimazione possiamo dire che entrambi partono da un modello uniperiodale delle quantità e dei prezzi-distribuzione, definibile alla Leontief e alla Sraffa (1960) come segue:

$$(2.7) \quad A Q + S = Q ,$$

$$(2.8) \quad A' P (1 + \pi) + L w = P ,$$

$$(2.9) \quad A Q (1 + s) = Q ,$$

$$(2.10) \quad \pi = s (1 - w) .$$

Nel sistema ora scritto  $A$  è una matrice quadrata di coefficienti tecnici, produttiva e quindi con autovalore massimo minore dell'unità;  $Q$  è il vettore delle quantità prodotte;  $S$  è il vettore delle produzioni nette;  $P$  è il vettore dei prezzi;  $\pi$  è il saggio di profitto;  $w$  indica il tasso di salario. La relazione (2.9) considera un caso particolare della (2.7), con un saggio uniforme di prodotto netto,  $s$ , uguale per tutte le merci. In tale caso, quando l'intero prodotto netto è accumulato, il sistema cresce al saggio massimo pari a  $s$ . La relazione (2.10) è ottenuta utilizzando un particolare numerario, la "merce tipo", ed esprime la relazione fra saggio di profitto e salario unitario.

Pasinetti passando alla dinamica analizza, oltre alla popolazione, due fattori di crescita di una economia industrializzata e rappresentata con uno schema multisettoriale:

a) l'applicazione della ricerca e del progresso scientifico e tecnologico ai processi produttivi, al qual proposito Pasinetti elabora la categoria "settori verticalmente integrati", in ciascuno dei quali è prodotto un solo bene finale mentre tutti i fattori di produzione vengono consolidati entro un solo fattore di produzione globale, chiamato convenzionalmente lavoro. In tal modo egli riesce a misurare gli effetti del progresso tecnico in qualunque settore esso si verifichi e quali che siano le sue ripercussioni nello schema di interdipendenze in base alla produttività del lavoro con riferimento a ogni specifico bene prodotto. Si coglie così anche l'aspetto quantitativo dei cambiamenti qualitativi nei processi di produzione;

b) la crescita dei redditi procapite generata dal progresso tecnico genera crescita della domanda che sarà diversa per i vari beni e quindi per i vari settori produttivi. Utilizzando la legge di Engel, Pasinetti individua anche il declino relativo di determinati settori per la evoluzione nei comportamenti di consumo al crescere del reddito.



Sulla base di tale modello Pasinetti esamina poi, in uno successivo, il ruolo dell'apprendimento umano e delle istituzioni nel determinare la crescita economica, i divari della crescita tra paesi e le relazioni internazionali.

Quanto agli strumenti matematici Pasinetti utilizza l'algebra lineare con particolare originalità nella determinazione dei settori verticalmente integrati attraverso i contenuti diretti e indiretti di lavoro e di capacità produttiva, determinabili attraverso l'utilizzo delle inverse delle matrici dei coefficienti tecnici di capitale circolante, di capitale fisso e di lavoro.

Quadrio Curzio considera il ruolo dei mezzi di produzione scarsi come la terra e le risorse naturali e i vincoli che gli stessi pongono ai processi di crescita. In tal modo, riprendendo una indicazione data da Sraffa, nel caso uniperiodale riconsidera la impostazione ricardiana che in tutti i modelli di crescita dagli anni Trenta era stata trascurata, nella convinzione che le scarsità naturali non avessero ruolo in un mondo dominato dal progresso tecnico.

Quadrio Curzio dimostra come non sia più possibile la crescita a saggio costante eguale per tutti i settori produttivi e come vi siano diversi saggi di crescita settoriali, accompagnati dalla formazione di residui non accumulabili. Interessante appare la costruzione di tecnologie globali (introducendo in matrici di Leontief-Sraffa dei coefficienti di erogazione ripartiti) e di tecnologie composte che risultano concatenate nel tempo. Di interesse sono anche gli effetti che la crescita ha sulla distribuzione del reddito ed in particolare sulla evoluzione della rendita connessa ai mezzi di produzione scarsi, come la terra e le risorse naturali.

In sintesi, esiste oggi una vasta gamma di modelli multisettoriali di crescita, che utilizzano metodi matematici ai quali va il merito di avere notevolmente arricchito la portata dei risultati.

### 3. IL MODELLO MACROECONOMICO DI CRESCITA DI HARROD-DOMAR

Un modello, spesso ritenuto essere il prototipo dei modelli aggregati di crescita, va sotto il nome di *modello di Harrod-Domar* (Harrod, 1939, Domar, 1946). Nella formulazione più tradizionale si tratta di un modello in tempo continuo per un'economia isolata, rappresentato dalle relazioni tra le seguenti variabili aggregate, da interpretarsi come intensità istantanee:

$Y$  indica la produzione aggregata;

$K$  indica il capitale aggregato (espresso nelle stesse unità di misura della produzione).

$L$  rappresenta la quantità di lavoro disponibile;

$S$  indica il risparmio globale;

$I$  rappresenta l'investimento (omogeneo con la produzione).

Una prima relazione esprime il tasso istantaneo di produzione come funzione della quantità di capitale e di lavoro:

$$(3.1) \quad Y(t) = \min \{vK(t), uL(t)\} \quad (v > 0, u > 0)$$

ossia la produzione si ottiene, secondo i coefficienti fissi  $v, u$ , dal capitale e dal lavoro.

Il lavoro cresce esponenzialmente al tasso positivo esogeno  $g$ :

$$(3.2) \quad L(t) = L_0 \exp(gt) \quad (L_0 > 0),$$

dove  $L_0$  rappresenta il lavoro inizialmente disponibile.

Il risparmio è una frazione data  $s$ , con  $0 < s < 1$ , del reddito, ossia:

$$(3.3) \quad S(t) = sY(t).$$

In equilibrio il risparmio eguaglia l'investimento:

$$(3.4) \quad S(t) = I(t).$$

Il tasso di accrescimento del capitale coincide con l'investimento:

$$(3.5) \quad \dot{K}(t) = I(t).$$

Nel caso sia  $\min \{vK(t), uL(t)\} = vK(t)$ , dalle precedenti equazioni (3.1)-(3.5) ricaviamo:

$$\dot{K}(t) = I(t) = S(t) = sY(t) = svK(t);$$

il primo e l'ultimo membro formano una semplice equazione differenziale la cui soluzione generale è:

$$(3.6) \quad K(t) = K_0 \exp(sv t)$$

dove  $K_0$  rappresenta il capitale iniziale dato. Per ottenere una continua piena occupazione di entrambi i fattori produttivi (capitale e lavoro) deve essere  $vK(t) = uL(t)$  per ogni  $t$ , ossia

$$(3.7) \quad vK_0 \exp(sv t) = uL_0 \exp(gt)$$

per ogni  $t \geq 0$ . Dalla (3.7) otteniamo innanzitutto che deve essere  $vK_0 = uL_0$ , ossia capitale e lavoro devono essere inizialmente disponibili nel rapporto  $u/v$  determinato dai coefficienti di produzione; inoltre deve essere verificata, istante dopo istante, l'uguaglianza

$$(3.8) \quad sv = g.$$

La relazione (3.8) stabilisce la celebre condizione, detta anche "del filo di rasoio", secondo la quale per avere continua piena occupazione di entrambi i fattori le grandezze esogene  $s$ ,  $v$ ,  $g$  devono soddisfare la detta relazione. Diversamente, l'uno o l'altro dei due fattori resta parzialmente disoccupato. In piena occupazione, dalle relazioni (3.7) e (3.1) ricaviamo anche

$$(3.9) \quad Y(t) = vK_0 \exp (svt) .$$

Poichè i parametri  $s$ ,  $v$ ,  $g$  sono tutti positivi, chiaramente tutte le grandezze del modello crescono nel tempo al tasso istantaneo  $sv > 0$ . Si osserva quindi che il tasso di crescita dell'economia è tanto più elevato quanto maggiori sono il tasso di risparmio  $s$  e il coefficiente di capitale  $v$ . Nessuna influenza è invece direttamente esercitata dal coefficiente di lavoro  $u$ . Sembra quindi di poter affermare che il tasso di crescita dell'economia è favorito dal tasso di risparmio e dal progresso tecnico, che verosimilmente aumenta il coefficiente  $v$  se e in quanto comporta, ceteris paribus, un aumento del capitale rispetto al lavoro. Naturalmente, quando non vale la (3.8), allora il lavoro risulta parzialmente disoccupato, nel caso sia  $sv < g$ , mentre nella opposta situazione è il capitale ad essere parzialmente disoccupato.

#### 4. MODELLI MACROECONOMICI

Al modello di crescita di Harrod-Domar seguono almeno due grandi filoni di analisi:

- i) quello neoclassico (Solow, Swan e altri) che pone al centro della sua attenzione il ruolo dei fattori produttivi e tecnologici della crescita;
- ii) quello neokeynesiano (Kaldor, J. Robinson, Pasinetti e altri) che centra la sua attenzione sulla distribuzione del reddito e sulla accumulazione del capitale.

Nel seguito ci interesseremo dapprima di quelli neoclassici e poi di quelli a crescita endogena che, per quanto di derivazione neoclassica, appaiono più generali.

I modelli macroeconomici neoclassici della teoria della crescita hanno avuto origine a partire dalla seconda metà degli anni Cinquanta, dapprima con i fondamentali contributi di Solow (1956) e Swan (1956), e poi con i lavori di Cass (1965) e Koopmans (1965) <sup>(1)</sup>. Il punto di partenza di questo approccio consiste nella specificazione di una funzione di produzione in cui la produzione aggregata ( $Y$ ) dipende dalla quantità di capitale ( $K$ ), dall'occupazione ( $N$ ) e dal tempo <sup>(2)</sup>. Formalmente si ha

$$(4.1) \quad Y = F(K, N, t) \quad \cdot$$

La produzione viene ripartita tra consumi e variazioni nella quantità di capitale (ossia investimenti), cosicchè si ha

$$(4.2) \quad Y = Nc + \dot{K}$$

ove  $c$  è il consumo pro capite (e dunque  $Nc$  rappresenta il consumo aggregato) e  $\dot{K} = dK/dt$ . È importante notare come in questa letteratura si assume quasi sempre che l'occupazione è uguale (o proporzionale) alla dimensione della forza lavoro, cosicchè tutti i "problemi di coordinamento" spariscono in partenza.

Nel modello originale di Solow con progresso tecnico *labour augmenting* (che è un pò il prototipo dei modelli di impostazione neoclassica) viene descritto un sistema economico chiuso, dotato di mercati concorrenziali e formato da individui razionali (e identici tra loro) in cui la tecnologia è formalizzata (si veda l'equazione (4.13) più sotto) mediante una funzione di produzione caratterizzata da rendimenti di sostituzione decrescenti di lavoro e capitale separatamente, e da rendimenti di scala costanti dei due fattori <sup>(3)</sup>. Per quanto riguarda

<sup>(1)</sup> Nella (breve) esposizione che segue del modello di crescita neoclassico tradizionale, si seguirà, principalmente, Solow, 1994a.

<sup>(2)</sup> Sulla funzione di produzione neoclassica si può richiamare il pensiero di Pasinetti (1994, pag. 357): «...As far as the neoclassical production function is concerned, there has been a long controversy....Here I shall only recall the very strong result, according to which, in general, it is not possible to specify a priori the relation between the rate of profits and the quantity of capital per man, whatever the way in which the quantity of capital is measured. This result, however uncomfortable it may be for orthodox theory, still stands.»

<sup>(3)</sup> È importante rimarcare (si veda, per esempio, Lombardini, 1996) come nelle analisi di ispirazione neoclassica l'obiettivo principale è (quasi) sempre quello di spiegare come l'equilibrio concorrenziale venga dapprima raggiunto, e poi mantenuto. Si spiega in questa ottica l'ipotesi standard di rendimenti di sostituzione decrescenti: rendimenti crescenti provocherebbero infatti cambiamenti strutturali, e questi ultimi, a loro volta, darebbero luogo a forme di mercato non concorrenziali.

la spiegazione del consumo totale, vi sono sostanzialmente due direzioni che la letteratura esistente sull'argomento ha seguito a partire dagli anni Cinquanta fino ai nostri giorni (Solow, 1994a, pag 18). La prima è la versione cosiddetta "comportamentista" della teoria della crescita aggregata, che consiste nel pensare a una possibile specificazione della funzione del consumo pro capite (o del risparmio) che sia plausibile dal punto di vista empirico. Si ipotizza quindi l'esistenza di una funzione del tipo

$$(4.3) \quad c = c(K, N, t)$$

cosicchè l'analisi del modello si riduce allo studio dell'equazione differenziale

$$(4.4) \quad \dot{K} = F(K, N, t) - Nc(K, N, t)$$

La seconda direzione della teoria della crescita è la versione cosiddetta "ottimizzante" in cui, seguendo l'impostazione originaria di Ramsey (1928), si ipotizza che l'economia sia composta da un singolo individuo immortale che sceglie il sentiero ottimale del consumo in modo da massimizzare la somma (ovvero l'integrale, dato che la formalizzazione è in tempo continuo) scontata e ponderata delle utilità istantanee (dove i pesi rappresentano la dimensione della popolazione) <sup>(4)</sup>. Il consumatore dunque sceglie i propri consumi nel tempo in modo da massimizzare il seguente integrale:

$$(4.5) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) N(t) dt$$

<sup>(4)</sup> Scrive Solow nella sua Lezione Nobel (8 Dicembre 1987; riportato in Solow (1990), pagg. XVI-XVII): «...L'idea è di immaginare che l'economia sia popolata da un singolo consumatore immortale o da numerosi ma identici consumatori immortali. L'immortalità in sé non è un problema: ogni consumatore potrebbe essere sostituito da una dinastia, ogni membro della quale tratti i suoi successori come proprie estensioni. Ma ciò obbliga ad essere lungimiranti. Il consumatore non obbedisce ad alcuna funzione di risparmio a breve nè alla regola empirica del ciclo vitale ipotizzata da Modigliani. Si ipotizza che egli, o la dinastia, risolva un problema di massimizzazione di utilità per un tempo infinito.... Il passo successivo è ancora più difficile da mandare giù. Per questo consumatore ogni impresa non è che un trasparente strumento, un intermediario, un meccanismo per procedere all'ottimizzazione intertemporale con la sola limitazione dei vincoli tecnologici e delle dotazioni iniziali. In tal modo, qualsiasi tipo di fallimento del mercato è escluso fin dall'inizio, in virtù delle ipotesi fatte. Non vi sono nè complementarità strategiche, nè errori di coordinamento, nè dilemmi del prigioniero.

Il risultato finale è una costruzione in cui si ipotizza che l'intera economia stia risolvendo un problema di crescita ottimale nel tempo, secondo Ramsey, perturbato unicamente da impulsi stocastici stazionari ai gusti e alla tecnologia. E ad essi l'economia si adatta in modo ottimale.»

ove  $\rho > 0$  misura il tasso a cui le utilità istantanee vengono scontate. Il vincolo che la tecnologia impone alla massimizzazione dell'utilità intertemporale è dato da

$$(4.6) \quad Nc + \dot{K} = F(K, N, t)$$

In questo tipo di letteratura, l'ipotesi standard che viene fatta riguardo alla funzione di produzione è che essa possa essere scritta come

$$(4.7) \quad Y(t) = F(K, A(t)N(t))$$

con le ulteriori ipotesi, dopo avere scelto opportunamente le unità di misura:

$$(4.8) \quad A(t) = e^{\mu t}, \quad (\mu > 0)$$

e

$$(4.9) \quad N(t) = e^{\lambda t}, \quad (\lambda > 0).$$

Interpretando la dipendenza dal tempo della funzione di produzione come un modo di rappresentare il progresso tecnico (nel senso che si può pensare che le tecniche di produzione migliorino continuamente nel tempo), il progresso tecnico dato dalla (4.8) viene chiamato "a efficienza crescente del lavoro". Per quel che concerne la funzione di utilità (in termini del consumo pro capite), l'ipotesi abituale è che essa abbia la forma

$$(4.10) \quad u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \quad (\sigma \neq 1)$$

ove si ha  $\sigma > 0$ , e  $1/\sigma$  è l'elasticità di sostituzione intertemporale. In virtù delle ipotesi introdotte, l'integrale da massimizzare diventa quindi

$$(4.11) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left( \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \right) N(t) dt$$

soggetta al vincolo

$$(4.12) \quad N(t)c(t) + \dot{K}(t) = F(K(t), A(t)N(t)).$$

Secondo la versione ottimizzante della teoria, un'economia in crescita segue un sentiero che risolve questo problema di ottimizzazione. Al fine di determinare

agevolmente la soluzione del problema, l'ipotesi che viene solitamente introdotta è che la funzione di produzione sia di tipo Cobb-Douglas, cioè

$$(4.13) \quad F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Nonostante le differenze di approccio tra le due versioni della teoria, quella comportamentista e quella ottimizzante, i risultati che si ottengono sono essenzialmente gli stessi (sono semmai gli strumenti matematici ad essere diversi: la teoria delle equazioni differenziali nel primo caso, la teoria del controllo ottimo nel secondo). Nel modello standard della teoria aggregata i saggi di crescita dell'occupazione, della popolazione e, soprattutto, del progresso tecnico risultano esogeni al modello, e nessun ruolo particolare è assegnato al capitale umano o alla politica del governo. In queste ipotesi il sistema converge verso un equilibrio di crescita uniforme (*steady state*) in cui il capitale pro capite viene accumulato allo stesso saggio del reddito (e del consumo) pro capite, e in cui il tasso di risparmio e il tasso reale dell'interesse risultano costanti lungo il sentiero di equilibrio. Inoltre, il saggio di crescita del reddito (e del consumo) pro capite risultano tutti uguali al saggio (esogeno) del progresso tecnico. In altre parole, la tecnologia, sebbene sia data esogenamente, è l'unica forza che produce la crescita nel reddito pro capite (facendo aumentare l'efficienza del lavoro), ed è dunque il motore della crescita (*the engine of growth*).

Vogliamo ora analizzare le ragioni che hanno spinto gli economisti, nell'ultimo decennio, a cercare di estendere in varie direzioni il modello standard aggregato, sopra brevemente richiamato. Si può cominciare con l'osservare come, storicamente, il fatto che i saggi di crescita uniforme non vengano determinati all'interno del modello ha rappresentato una delle limitazioni teoriche più significative per i modelli della teoria aggregata della crescita di prima generazione. Vi è però anche una implicazione della teoria che risulta, dal punto di vista empirico, di interpretazione assai difficile. Dal momento che le cause che determinano il progresso tecnico dovrebbero avere una forte tendenza alla diffusione internazionale, ne segue che una delle predizioni empiriche del modello è che si abbia una sostanziale uguaglianza dei tassi di sviluppo dei diversi paesi. Questi tassi possono certamente essere differenti tra loro al di fuori del sentiero di crescita uniforme, ma tali differenze possono avere solo carattere transitorio (*transitional dynamics*): infatti, poichè per ciascun paese il tasso di crescita pro capite risulta inversamente dipendente dal reddito iniziale, tassi diversi dovrebbero provocare convergenza dei livelli e dunque i paesi poveri dovrebbero tendere a crescere più rapidamente di quelli ricchi. Il modello tradizionale di crescita aggregata (con progresso tecnico esogeno) prevede dunque l'esistenza di una forza che promuove la *convergenza* nei redditi pro capite dei vari paesi.

L'ipotesi che i paesi poveri tendano a crescere più rapidamente di quelli ricchi sembra essere tuttavia inconsistente con l'evidenza "cross-country". Negli ultimi anni sono stati effettuati numerosissimi studi sulla comparazione a livello internazionale dei tassi di crescita. La ragione che spiega questa esplosione di lavori è da ricercare, in primo luogo, nella disponibilità di dati validi sui conti economici di un gran numero di paesi. Heston e Summers, in particolare, hanno raccolto e pubblicato in una serie di articoli (1984, 1988 e 1991) dati sulle principali variabili (prodotto interno lordo reale, investimenti reali, spesa reale in consumi, ecc.) di circa 120 paesi diversi (praticamente tutti i paesi dell'ONU) per un periodo che va dal 1960 al 1985 (i dati sono stati poi aggiornati sino al 1988) <sup>(5)</sup>. Contrariamente alle predizioni dei modelli tradizionali di crescita aggregata, l'evidenza empirica, basata sui dati sopra ricordati, indica come vi sia una grande differenza sia nei livelli sia nei saggi di crescita economica dei diversi paesi. Una manifestazione esemplare della differenza dei saggi di crescita negli ultimi decenni è rappresentata dalla esperienza dei nuovi paesi industrializzati dell'Estremo Oriente e di Singapore. Questi paesi, tra il 1950 e il 1980, hanno sperimentato un saggio di crescita del 6 per cento all'anno, in confronto ad un saggio dell'1.5 per cento, nello stesso periodo di tempo, di tutti gli altri paesi a basso reddito. Da questi studi si evince inoltre come i tassi di crescita pro capite hanno correlazione quasi nulla con il prodotto pro capite iniziale <sup>(6)</sup>.

I risultati sopra menzionati indicano come sia alquanto improbabile che differenze così marcate nei redditi e nei saggi di crescita economica dei diversi paesi siano da imputare soltanto a dinamiche di tipo transitorio. In effetti bisogna però dire che l'ipotesi della convergenza è stata, negli ultimi anni, al centro di intenso dibattito, sia tra economisti sia, soprattutto, tra econometrici

<sup>(5)</sup> Le analisi empiriche sulla crescita economica cercano, tipicamente, di rispondere alle seguenti domande: Quale è il contributo del capitale (fisico) al prodotto? Quanto rapidamente i paesi poveri possono raggiungere quelli più ricchi? E quali sono i fattori in grado di favorire questa convergenza? Per rispondere a queste domande, l'approccio standard consiste nel fare una regressione dei tassi di crescita sui livelli di reddito (eventualmente includendo altre variabili esplicative nel secondo membro della equazione di regressione). In tal modo, i coefficienti della regressione forniscono informazioni sia sul contributo del capitale alla produzione sia sul tasso al quale le economie dei paesi poveri "inseguono" quelle dei paesi ricchi. La significatività dei risultati che si possono ottenere con un approccio di questo tipo risulta ovviamente molto accresciuta qualora le equazioni da stimare siano derivate da modelli di crescita teorici.

<sup>(6)</sup> Barro (1991), per esempio, utilizzando i dati di Summers e Heston (1988) relativi a 98 paesi, mostra come il tasso medio di crescita del prodotto interno lordo reale pro capite dal 1969 al 1985 non sia correlato significativamente con il prodotto interno lordo reale pro capite del 1960 (il coefficiente di correlazione è solo 0.09).



(e i risultati di queste analisi non sembrano essere, al momento, nè chiari nè definitivi). In particolare, ci si è concentrati sulla validità di una delle tre seguenti varianti dell'ipotesi della convergenza:

– l'ipotesi della convergenza assoluta, secondo la quale nel lungo periodo i tassi di crescita reale dei vari paesi tendono a convergere l'uno verso l'altro, indipendentemente dalle condizioni iniziali dei vari paesi;

– l'ipotesi della convergenza condizionale, secondo la quale nel lungo periodo paesi simili nelle loro caratteristiche strutturali tendono ad avere tassi di crescita che convergono l'uno verso l'altro indipendentemente dalle condizioni iniziali;

– l'ipotesi della convergenza per *club*, secondo la quale nel lungo periodo i tassi di crescita reale di paesi simili nelle caratteristiche strutturali tendono a convergere l'uno verso l'altro solo se anche le condizioni iniziali sono simili.

Poichè, in generale, a ciascun modello di crescita teorico corrisponde, come predizione empirica, una delle tre forme di convergenza, ne segue che un test empirico sulla validità di una delle tre forme di convergenza diventa inevitabilmente anche un test sulla validità del modello teorico che ha generato quella ipotesi. È esattamente questa la logica che ha portato alla critica del modello di crescita aggregato tradizionale (e alla successiva fioritura dei modelli di crescita endogena). Scrive in proposito Galor (1996, pag. 2):

*«Ironically .. despite the fact that the neoclassical growth model does not generate the absolute convergence hypothesis, the empirical rejection of this hypothesis was one of the prime factors that led some of the originators of the endogenous growth literature to reject the neoclassical growth model as a framework for the study of economic growth».*

Studi più recenti sembrerebbero indicare che il modello di crescita aggregata di tipo tradizionale giustifichi in realtà soltanto l'ipotesi della convergenza condizionale (piuttosto che quella della convergenza assoluta), e dunque la confutazione empirica dell'ipotesi della convergenza assoluta non implica automaticamente il rifiuto del modello di crescita aggregato standard. Al di là delle difficoltà di interpretazione sopra ricordate, per quel che concerne l'evidenza empirica sembra che si possa ragionevolmente concludere che i tassi di sviluppo sicuramente: a) differiscono sostanzialmente da paese a paese; b) non sono sistematicamente correlati con i livelli iniziali di reddito (le regressioni del tasso di sviluppo di un dato periodo sul solo reddito iniziale danno solitamente risultati non significativi).

I modelli di crescita endogena (Romer, 1986, 1990; Lucas, 1988; Barro, 1990) vengono concepiti, verso la metà degli anni Ottanta, proprio come reazione all'insoddisfacente contributo fornito dalla letteratura sulla crescita aggregata alla interpretazione delle differenze fra i tassi di sviluppo dei diversi paesi. Questi modelli, in altri termini, vengono ideati per rendere ragione del fatto che non appare empiricamente confermata l'ipotesi della convergenza verso un equilibrio di crescita uniforme caratterizzato da un tasso (esogeno) di progresso tecnico che dovrebbe risultare, in linea di principio, uguale per tutti i paesi. La teoria della crescita endogena si differenzia dalla teoria tradizionale della crescita aggregata per la particolare enfasi che viene posta sulla crescita economica come prodotto endogeno del sistema economico, e non come risultato di forze che agiscono dal di fuori. Questi modelli cercano allora di individuare nel capitale (o in altri fattori che possono essere riprodotti) un motore della crescita non esauribile. Seguendo Castellino (1992), possiamo sinteticamente ordinare l'insieme di questi modelli secondo che essi concentrino l'attenzione su:

- l'accumulazione di capitale umano (Lucas, 1988);
- il progresso tecnico (Romer, 1990);
- la spesa pubblica (Barro, 1990);
- gli effetti della politica economica (Rebelo, 1990, e King e Rebelo, 1990).

Ciascuno di questi modelli va «alla ricerca di un motore dello sviluppo che ne riconduca la responsabilità a fenomeni, a comportamenti, a scelte, a schemi organizzativi o quant'altro, che possano stabilmente differire da paese a paese» (Castellino, 1992, pag. 401). Si pensi, per esempio, al ruolo del progresso tecnico in questa classe di modelli. A differenza di quanto accade nel modello tradizionale di Solow, nel quale non vengono specificate quali siano le cause ultime capaci di generarlo, nel modello di Lucas (1988) il progresso tecnico emerge come risultato delle decisioni individuali dei consumatori, i quali scelgono razionalmente di dedicare una parte (più o meno consistente) del loro tempo al fine di migliorare le loro abilità e capacità professionali. Queste professionalità, offerte alle imprese sotto forma di lavoro qualificato, vengono poi utilizzate a fini produttivi. Nel modello di Romer (1990), invece, il progresso tecnico consiste nella scoperta e produzione, da parte delle imprese, di nuove *varietà* di beni intermedi, i quali contribuiscono poi alla produzione dei beni finali.

Il merito dunque dei modelli di crescita endogena (si veda in proposito, Lombardini, 1996, pag. 94) è quello di riuscire a mostrare come il progresso tecnico (derivante dalle decisioni degli *agenti*) permetta (assieme alla crescita della popolazione) di inquadrare l'evoluzione del sistema economico.

Il concetto di progresso tecnico utilizzato nei lavori appartenenti alla linea di ricerca sopra esaminata è tuttavia alquanto speciale, e non consente di analizzare in maniera appropriata i fenomeni, estremamente rilevanti per qualunque teoria della crescita, della *innovazione* e della *selezione sociale*. Un modo per introdurre questi specifici aspetti del progresso tecnico nell'analisi dei fenomeni di crescita è quello di ricorrere all'idea schumpeteriana di distruzione creativa come motore della crescita. È questo il percorso seguito, tra gli altri, da Aghion e Howitt (1992 e 1994) e da Lombardini (1996). Quest'ultimo in particolare utilizza i metodi propri della economia computazionale per investigare processi evolutivi corrispondenti alle innovazioni di tipo schumpeteriano. In Lombardini e Donati (1996a, 1996b) vengono presentate due diverse formalizzazioni della teoria schumpeteriana dello sviluppo economico. Nella prima di queste formalizzazioni, nell'ambito di un modello di quasi equilibrio, viene mostrato come la sola innovazione possa produrre la crescita. È opportuno osservare come in questo modello il progresso tecnico è endogeno, ma di un tipo notevolmente diverso da quello presente nei modelli di ispirazione neoclassica. Esso infatti emerge come prodotto del desiderio di innovazione degli imprenditori e non dai calcoli razionali dei consumatori o delle imprese (si veda Lombardini e Donati, 1996a, pag. 133). Ulteriori aspetti della teoria schumpeteriana vengono analizzati (in Lombardini e Donati, 1996b) nell'ambito di un secondo, più articolato, modello di tipo evolutivo, in cui vengono esaminati (con gli strumenti dell'economia computazionale) le interazioni tra selezione ed innovazione.

## 5. CONCLUSIONI

Le diverse teorie presentate in queste note cercano, in modo sintetico, di rendere ragione dei modelli di crescita economica. È naturale porsi allora la domanda se sia possibile estrarre da esse *la vera* teoria della crescita. E la risposta non può che essere negativa. Come ricorda Lombardini (1996) ogni teoria è caratterizzata, da un lato, dalla specifica definizione di sistema economico adottata, e dall'altro dalla scelta degli strumenti e dei metodi utilizzati per analizzare detto sistema. Tutte le definizioni di sistema sono, in qualche misura, parziali, e qualunque strumento (o metodo) risulta efficace per illustrare solo determinate specifiche proprietà del sistema. Quello che sembra invece ragionevole chiedersi è, ad esempio, se i modelli di crescita endogena consentano, rispetto a quelli tradizionali di crescita esogena, una comprensione più approfondita e articolata delle esperienze di crescita che si osservano nella realtà. A questa domanda purtroppo non è possibile, per il momento, dare una

risposta positiva. Non sempre (si veda in proposito, per esempio, Pack, 1994) l'indagine empirica, pur se stimolata dai modelli di crescita endogena, ne ha posto al vaglio implicazioni e predizioni proprie (e specifiche), limitandosi frequentemente a esaminare implicazioni e predizioni dei modelli di crescita tradizionali. Esemplare, in proposito, è il dibattito, sopra menzionato, sulla verifica empirica dell'ipotesi della convergenza. Si può però senza dubbio concludere che l'enorme fiorire di modelli di crescita, che si è avuto nell'ultimo decennio, ha stimolato un ritorno di interesse della comunità scientifica verso i problemi dello sviluppo economico e delle cause della crescita di lungo periodo<sup>(7)</sup>. E questo è, da solo, un risultato di notevole importanza.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- AGHION P., HOWITT P., 1992. *A Model of Growth Through Creative Destruction*. *Econometrica*, 60, pp. 323-51.
- AGHION P., HOWITT P., 1994. *Endogenous Technical Change: The Schumpeterian Perspective*. In: PASINETTI e SOLOW (eds), *Economic Growth and the Structure of Long-Term Development*, Proceedings of the IEA Conference held in Varenna, Italy, 1-3 October, 1992, St. Martin's Press, New York.
- BARRO R., 1990. *Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth*. *Journal of Political Economy*, Vol. 98, n. 5, part 2, pp. S103-125.
- BARRO R., 1991. *Economic Growth in a Cross Section of Countries*. *Quarterly Journal of Economics*, 106, pp. 407-444.
- CASS D., 1965. *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation*. *Review of Economic Studies*, Vol. 32, pp. 223-40.
- CASTELLINO O., 1992. *Una breve introduzione ai modelli di crescita endogena*, *Economia Politica*, Anno IX, n. 3, pp. 387-404.
- DOMAR E., 1946. *Capital expansion, rate of growth, and employment*. *Econometrica*, vol. 14, pp. 137-147.
- DORFMAN R., SAMUELSON P. A., SOLOW R., 1958. *Linear Programming and Economic Analysis*. New York, McGraw-Hill.
- EHRlich I., 1990. *The Problem of Development: Introduction*. *Journal of Political Economy*, vol. 98, n. 5, part 2, pp. S1-11.
- FUA G., 1993. *Crescita economica. Le insidie delle cifre*. Bologna, il Mulino.
- GALE D., 1956. *The closed linear model of production*. In: H. W. KUHN e A. W. TUCKER (a cura di), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton, Princeton Un. Press, pp. 285-303.
- GALOR O., 1996. *Convergence? Inferences from Theoretical Models*. CEPR Discussion Papers, n. 1350.
- HARROD R. F., 1939. *An Essay in Dynamic Theory*. *The Economic Journal*, vol. XLIX, pp. 14-33.
- KEMENY J. G., MORGENSTERN O., THOMPSON G. L., 1956. *A generalization of the von Neumann model of an expanding economy*. *Econometrica*, pp. 115-135.

(7) L'importanza di queste tematiche è giustamente enfatizzata da Lucas (1988, pag.5): «Once one starts to think about them, it is hard to think about anything else».

- KING R.G., Rebelo S.T., 1990. *Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications*. *Journal of Political Economy*, vol. 98, n. 5, part 2, pp. S126-150.
- KOOPMANS T., 1965. *On the Concept of Optimal Economic Growth*. In: *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North-Holland.
- LEONTIEF W., 1941. *The Structure of the American Economy, 1919-1929*. Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- LEONTIEF W., 1951. *The Structure of the American Economy, 1919-1939*. New York, Oxford University Press.
- LEONTIEF W., 1953. *Domestic Production and Foreign Trade: Further Theoretical and Empirical Analysis*, ripubblicato in W. LEONTIEF *Input-output Economics*. New York, Oxford University Press, 1966.
- LOMBARDINI S. 1996. *Growth and Economic Development*. Edward Elgar.
- LOMBARDINI S., DONATI F., 1996a. *A Schumpeterian Path of Economic Development*. In: S. LOMBARDINI, *Growth and Economic Development*, Edward Elgar.
- LOMBARDINI S., DONATI F., 1996b. *Selection, Innovation and Economic Development. Computational Economics Analysis*. In: S. LOMBARDINI, *Growth and Economic Development*. Edward Elgar.
- LUCAS R. E. JR., 1988. *On The Mechanics of Economic Development*. *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, n. 1, pp. 3-42.
- MORISHIMA M., 1960. *Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models*. *Econometrica*, pp. 352-363.
- MORISHIMA M., 1964. *Equilibrium Stability, and Growth*. Oxford, Clarendon Press.
- NEUMANN J. VON, 1937. *A model of general economic equilibrium*. *Review of Economic Studies*, 1945-46, pp. 1-9 (dal Tedesco).
- NICOLA P. C., 1976. *Lezioni di dinamica economica*, Bologna, il Mulino.
- NICOLA P. C., 1978. *Esistenza di soluzioni in un sistema dinamico di equilibrio generale*. In AA. VV., *Applicazioni del teorema del punto fisso all'analisi economica*, Roma, Accademia dei Lincei, pp.191-201.
- NIKAIDO H., 1964. *Persistence of continual growth near the von Neumann ray: a strong version of the Radner turnpike theorem*, *Econometrica*, pp. 151-162.
- NIKAIDO H., 1968. *Convex Structures and Economic Theory*. New York, Academic Press.
- PACK H., 1994. *Endogenous Growth Theory: Intellectual Appeal and Empirical Shortcomings*. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, n. 1, Winter, pp. 55-72.
- PASINETTI L., 1975. *Lezioni di teoria della produzione*. Bologna, il Mulino.
- PASINETTI L. L., 1981. *Structural Change and Economic Growth: A Theoretical Essay on the Dynamics of the Wealth of Nations*, Cambridge, Cambridge University Press.
- PASINETTI L. L., 1993, *Structural Economic Dynamics. A Theory of Economic Consequences of Human Learning*. Cambridge, Cambridge University Press.
- PASINETTI L. L., 1994, *The Structure of Long-Term Development: Concluding Comments*. In PASINETTI e SOLOW (eds), *Economic Growth and the Structure of Long-Term Development*, Proceedings of the IEA Conference held in Varenna, Italy, 1-3 October, 1992, St.Martin's Press, New York.
- QUADRIO CURZIO A., 1975. *Accumulazione del capitale e rendita*. Bologna, il Mulino.
- QUADRIO CURZIO A., 1986. *Technological Scarcity: an Essay on Production and Structural Change*. In M. BARANZINI e R. SCAZZIERI (a cura di), «*Foundations of Economics – Structure of Inquiry and Economic Theory*», Blackwell, Oxford, pp. 311-338.
- QUADRIO CURZIO A., 1993. *On Economic Science, its Tools, and Economic Reality*. In M. BARANZINI e G. C. HARCOURT (a cura di), «*The Dynamics of the Wealth of Nations. Growth, Distribution and Structural Change*». St Martin Press.

- KING R.G., Rebelo S.T., 1990. *Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications*. *Journal of Political Economy*, vol. 98, n. 5, part 2, pp. S126-150.
- KOOPMANS T., 1965. *On the Concept of Optimal Economic Growth*. In: *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North-Holland.
- LEONTIEF W., 1941. *The Structure of the American Economy, 1919-1929*. Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- LEONTIEF W., 1951. *The Structure of the American Economy, 1919-1939*. New York, Oxford University Press.
- LEONTIEF W., 1953. *Domestic Production and Foreign Trade: Further Theoretical and Empirical Analysis*, ripubblicato in W. LEONTIEF *Input-output Economics*. New York, Oxford University Press, 1966.
- LOMBARDINI S. 1996. *Growth and Economic Development*. Edward Elgar.
- LOMBARDINI S., DONATI F., 1996a. *A Schumpeterian Path of Economic Development*. In: S. LOMBARDINI, *Growth and Economic Development*, Edward Elgar.
- LOMBARDINI S., DONATI F., 1996b. *Selection, Innovation and Economic Development. Computational Economics Analysis*. In: S. LOMBARDINI, *Growth and Economic Development*. Edward Elgar.
- LUCAS R. E. JR., 1988. *On The Mechanics of Economic Development*. *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, n. 1, pp. 3-42.
- MORISHIMA M., 1960. *Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models*. *Econometrica*, pp. 352-363.
- MORISHIMA M., 1964. *Equilibrium Stability, and Growth*. Oxford, Clarendon Press.
- NEUMANN J. VON, 1937. *A model of general economic equilibrium*. *Review of Economic Studies*, 1945-46, pp. 1-9 (dal Tedesco).
- NICOLA P. C., 1976. *Lezioni di dinamica economica*, Bologna, il Mulino.
- NICOLA P. C., 1978. *Esistenza di soluzioni in un sistema dinamico di equilibrio generale*. In AA. VV., *Applicazioni del teorema del punto fisso all'analisi economica*, Roma, Accademia dei Lincei, pp.191-201.
- NIKAIDO H., 1964. *Persistence of continual growth near the von Neumann ray: a strong version of the Radner turnpike theorem*, *Econometrica*, pp. 151-162.
- NIKAIDO H., 1968. *Convex Structures and Economic Theory*. New York, Academic Press.
- PACK H., 1994. *Endogenous Growth Theory: Intellectual Appeal and Empirical Shortcomings*. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, n. 1, Winter, pp. 55-72.
- PASINETTI L., 1975. *Lezioni di teoria della produzione*. Bologna, il Mulino.
- PASINETTI L. L., 1981. *Structural Change and Economic Growth: A Theoretical Essay on the Dynamics of the Wealth of Nations*, Cambridge, Cambridge University Press.
- PASINETTI L. L., 1993, *Structural Economic Dynamics. A Theory of Economic Consequences of Human Learning*. Cambridge, Cambridge University Press.
- PASINETTI L. L., 1994, *The Structure of Long-Term Development: Concluding Comments*. In PASINETTI e SOLOW (eds), *Economic Growth and the Structure of Long-Term Development*, Proceedings of the IEA Conference held in Varenna, Italy, 1-3 October, 1992, St.Martin's Press, New York.
- QUADRIO CURZIO A., 1975. *Accumulazione del capitale e rendita*. Bologna, il Mulino.
- QUADRIO CURZIO A., 1986. *Technological Scarcity: an Essay on Production and Structural Change*. In M. BARANZINI e R. SCAZZIERI (a cura di), «*Foundations of Economics – Structure of Inquiry and Economic Theory*», Blackwell, Oxford, pp. 311-338.
- QUADRIO CURZIO A., 1993. *On Economic Science, its Tools, and Economic Reality*. In M. BARANZINI e G. C. HARCOURT (a cura di), «*The Dynamics of the Wealth of Nations. Growth, Distribution and Structural Change*». St Martin Press.

- QUADRIO CURZIO A., PELLIZZARI F., 1996. *Risorse, Tecnologie, Rendita*. Bologna, il Mulino.
- RADNER R., 1961. *Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states*. Review of Economic Studies, p. 98-104.
- RAMSEY F. P., 1928. *A Mathematical Theory of Savings*. The Economic Journal, 38, pp. 543-59.
- RICARDO D., 1817-23. *Principles of Political Economy and Taxation*. In: *The Works and Correspondence of David Ricardo*, vol. 1, ed. P. SRAFFA, Cambridge, Cambridge University Press, 1951.
- RIVERA-BATIZ L., ROMER P., 1991. *Economic Integration and Endogenous Growth*. Quarterly Journal of Economics, vol. 106, pp. 531-56.
- ROMER P., 1986. *Increasing Returns and Long-Run Growth*. Journal of Political Economy, Vol. 94, n. 5, pp. 1002-37.
- ROMER P., 1990. *Endogenous Technological Change*. Journal of Political Economy, vol. 98, n. 5, part 2, pp. S71-102.
- ROMER P., 1994. *The Origins of Endogenous Growth*. Journal of Economic Perspectives, vol. 8, n. 1, Winter, pp. 3-22.
- SMITH A., 1776. *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, 2 vols, London, edizione critica a cura di R. H. CAMPBELL A. S. SKINNER e W. B. TODD in *The Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith*, 2 vols, London, 1976.
- SOLOW R., 1956. *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, 70, pp. 65-94.
- SOLOW R., 1990. *La teoria della crescita*. Edizioni La Comunitaria.
- SOLOW R., 1994a. *Lezioni sulla teoria della crescita endogena*. La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- SOLOW R., 1994b. *Perspectives on Growth Theory*. Journal of Economic Perspectives, vol. 8, n. 1, Winter, pp. 45-54.
- SOLOW R., SAMUELSON P. A., 1953. *Balanced growth under constant returns to scale*. Econometrica, pp. 412-424.
- SRAFFA P., 1960. *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi, Torino.
- SUMMERS R., HESTON A., 1984. *Improved International Comparisons of Real Product and Its Composition: 1959-1980*. Review of Income and Wealth, 30, pp. 207-262.
- SUMMERS R., HESTON A., 1988. *A New Set of International Comparisons of Real Product and Price Levels: Estimates for 130 Countries, 1950-1985*. Review of Income and Wealth, 34, pp. 1-25.
- SUMMERS R., HESTON A., 1991. *The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons, 1950-1988*. Quarterly Journal of Economics, 106, pp. 327-68.
- SWAN T. W., 1956, *Economic Growth and Capital Accumulation*, Economic Record, 32, pp. 334-361.
- SYLOS LABINI P., 1992, *Elementi di Dinamica Economica*, Laterza, Bari.